συνδυαστική

Παύλος Εφραιμίδης
pefraimi <at> ee.duth.gr

περιεχόμενα

- ενδεικτική ύλη:
  - βασική θεωρία μέτρησης διακριτών δομών
  - γεννήτριες συναρτήσεις (για τη μέτρηση διακριτών δομών)
  - θεωρία μέτρησης διακριτών δομών υπό την ύπαρξη συμμετριών
- θα ασχοληθούμε με τη βασική θεωρία μέτρησης διακριτών δομών

βασική θεωρία μέτρησης διακριτών δομών

- περιεχόμενα:
  - κανόνας γινομένου
  - κανόνας αθροίσματος
  - μεταθέσεις και διατάξεις
  - συνδυασμοί αντικειμένων
  - τοποθετήσεις σφαιριδίων σε κουτιά
  - μέτρηση και διακριτή πιθανότητα

2 βασικοί κανόνες μέτρησης

- Κανόνας αθροίσματος
- Κανόνας γινομένου

Κανόνας Γινομένου

- Παράδειγμα:
  - Χρωματισμός μιας πόρτας
    - 2 πιθανά χρώματα για την έξω πλευρά (Α, Μ)
    - 3 πιθανά χρώματα για την μέσα πλευρά (Π, Μ, Κ)
  - Ποιοι είναι οι πιθανοί συνδυασμοί χρωμάτων για μια πόρτα;
    - (Α,Π), (Α,Μ), (Α,Κ), (Μ,Π), (Μ,Μ), (Μ,Κ)
  - Κανόνας γινομένου: *2 επιλογές για την έξω πλευρά επί 3 επιλογές για την μέσα πλευρά δίνει 2x3=6 συνολικά επιλογές*

Κανόνας αθροίσματος

- Χρωματισμός της ίδιας πόρτας, αυτή τη φορά όμως επιτρέπεται να χρωματίσουμε μόνο τη μία από τις 2 πλευρές
- Ποιοι είναι οι πιθανοί συνδυασμοί;
  - (Α,-), (Μ,-), (-,Κ), (-,Π), (-,Μ)
- Κανόνας αθροίσματος: έχουμε είτε 2 επιλογές για την έξω πλευρά είτε 3 επιλογές για την μέσα πλευρά, και επομένως συνολικά 2+3=5 επιλογές

μεταθέσεις και διατάξεις

μεταθέσεις

- τοποθέτηση n διαφορετικών αντικειμένων σε μια σειρά
- ο αριθμός των δυνατών μεταθέσεων είναι
  - $n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 1 = n!$
- παραγοντικό $n!$
- ορίζουμε για $n=0$, $0! = 1$

μεταθέσεις με ομάδες όμοιων στοιχείων

- n αντικείμενα
- t ομάδες, με n_t αντικείμενα η καθεμία

- αριθμός μεταθέσεων:

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \ldots n_t!}$$

διατάξεις

- έστω n διαφορετικά αντικείμενα και τοποθετούμε στη σειρά $k \leq n$ από αυτά τα αντικείμενα.
- το πλήθος των διαφορετικών διατάξεων είναι

$$n \times (n-1) \times \ldots (n-k+1) = P(n,k)$$

διατάξεις με ομάδες όμοιων στοιχείων

- ισχύει εδώ παρόμοιος τύπος με τις μεταθέσεις με ομάδες όμοιων αντικειμένων;

συνδυασμοί αντικειμένων

- δίνονται n διαφορετικά αντικείμενα
- επιλέγουμε k από αυτά, χωρίς να μας ενδιαφέρει η σειρά επιλογής είναι ένας συνδυασμός k από n αντικείμενα
- πόσοι συνδυασμοί υπάρχουν;
- $C(n,k) = n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1) / k!$

συνδυασμοί αντικειμένων με επαναλήψεις

- σύνολο με n στοιχεία (προφανώς διαφορετικά μεταξύ τους)
  - **επιλέγουμε k στοιχεία:** $C(n,k)$ συνδυασμοί
  - **επιλέγουμε k στοιχεία** επιτρέποντας όμως επανάληψη των στοιχείων – δηλαδή κάθε στοιχείο του συνόλου μπορεί να επιλεγεί ξανά και ξανά: πόσοι είναι οι πιθανοί συνδυασμοί;

$$C(n+k-1,k)$$

Τοποθέτηση σφαιριδίων σε κουτιά

Μοντέλο	Περιορισμός	Αριθμός τοποθετήσεων
n διακεκριμένα σφαιρίδια σε m διακεκριμένα κουτιά	Δεν έχει σημασία η σειρά εμφάνισης των σφαιριδίων στα κουτιά	m^n
n διακεκριμένα σφαιρίδια σε m διακεκριμένα κουτιά	Έχει σημασία η σειρά εμφάνισης των σφαιριδίων στα κουτιά	$\frac{(m+n-1)!}{(m-1)!}$
n μη διακεκριμένα σφαιρίδια σε m διακεκριμένα κουτιά	Δεν έχει σημασία η σειρά εμφάνισης των σφαιριδίων στα κουτιά	$\frac{(m+n-1)!}{n!(m-1)!}=C(m+n-1,n)$
n μη διακεκριμένα σφαιρίδια σε m διακεκριμένα κουτιά, $m \geq n$	Κάθε κουτί περιέχει το πολύ ένα σφαιρίδιο	$\frac{m!}{n!(m-n)!}=C(m,n)$

άσκηση

Θεωρήστε τον πιο κάτω κώδικα:

```
for i =1 to n do
    for j =1 to i do
        for k =1 to j do
            print(i * j + k)
```

Πόσες φορές θα εκτελεστεί το print(i * j + k) ως συνάρτηση του n ;

άσκηση

- Μαυρονικόλας, παράδειγμα 1.11, σελ. 78
- Μαυρονικόλας, άσκηση α 1.22, σελ. 79
- Μαυρονικόλας, παράδειγμα 1.12, σελ. 80
- Μαυρονικόλας, άσκηση α 1.23, σελ. 80
- Μαυρονικόλας, Πρόταση 1.14, σελ 81
- αρχή του περιστερώνα

Πηγές - Αναφορές

- Διακριτά Μαθηματικά και Μαθηματική Λογική, Τόμος Δ, Γ. Σταματίου, ΕΑΠ (Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο)
- Διακριτά Μαθηματικά και Μαθηματική Λογική, Τόμος Β, Μ. Μαυρονικόλας, ΕΑΠ (Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο)