



Θεωρία γραφημάτων

Παύλος Εφραιμίδης

`pefraimi <at> ee.duth.gr`



ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

- βασικές έννοιες (τόμος Α)
- βασικές έννοιες (τόμος Β)



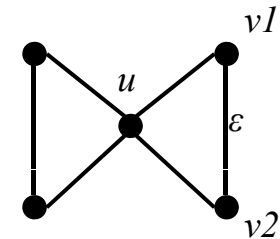
Θεωρία Γραφημάτων - Βασική Ορολογία

- Τόμος Α, Ενότητα 4.1

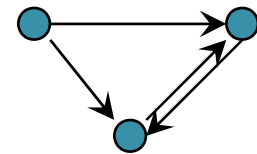
Βασική Ορολογία Γραφημάτων

- Γράφημα $\Gamma = (E, V)$
- V : κόμβοι - κορυφές του γραφήματος
- E : γραμμές - ακμές του γραφήματος
- Μονοπάτι

- μη κατευθυνόμενο γράφημα $\Gamma=(E, V)$
- $\epsilon=(v1, v2)$

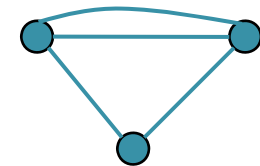


- κατευθυνόμενο γράφημα $\Gamma=(E, V)$



Απλό Γράφημα

- Η ακμή $\varepsilon=(v_1,v_2)$ εφάπτεται (incident on) των κορυφών v_1 και v_2 .
- Οι κορυφές v_1 και v_2 λέγονται γειτονικές.
- Παράλληλες ακμές σε μη κατευθυνόμενο γράφημα



- Ανακύκλωση (loop) 

- Απλό γράφημα (simple graph): Γράφημα Γ δίχως ανακυκλώσεις και παράλληλες ακμές.

Μονοπάτια - Κύκλοι

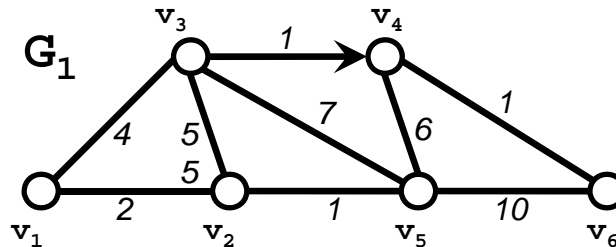
- **ΕΙΔΙΚΑ ΜΟΝΟΠΑΤΙΑ**
 - **Απλό μονοπάτι (simple path)** σε γράφημα Γ : *μονοπάτι δίχως επαναλαμβανόμενες κορυφές*
 - **Κύκλος (cycle)**: *Μονοπάτι δίχως επαναλαμβανόμενες ακμές όπου αρχική και τελική κορυφή συμπίπτουν*
 - **Απλός Κύκλος (simple cycle)**: *κύκλος δίχως επαναλαμβανόμενες κορυφές (εκτός αρχικής και τελικής)*

Ορολογία Γραφημάτων

- **Μεμονωμένη κορυφή:** Μια κορυφή στην οποία δεν εφάπτεται καμία ακμή καλείται μεμονωμένη κορυφή (*isolated vertex*).



- **Γράφημα με βάρη:** Γράφημα στο οποίο έχει συσχετιστεί με κάθε ακμή ένας αριθμός, το βάρος.



- **Μήκος μονοπατιού σε γράφημα με βάρη:** Το άθροισμα των βαρών των ακμών του μονοπατιού.

Ειδικά Γραφήματα

- Ειδικές κατηγορίες γραφημάτων:
 - Πλήρες γράφημα (complete graph) με n κορυφές
 - Διχοτομήσιμο Γράφημα (bipartite graph)
 - Πλήρες Διχοτομήσιμο Γράφημα (bipartite graph) με n και m κορυφές

Συνδεόμενα Γραφήματα

- Συνδεόμενο Γράφημα (connected graph)
- Υπογράφημα (Sub-graph): Τμήμα του γραφήματος Γ που περιέχει την v (part of the graph)

Ασκήσεις

- Δραστηριότητα 4.3
- Νδο το πλήθος των διαδρομών από τη v_1 στη v_1 μήκους n



- Συμβουλή: Θεωρήστε δεδομένη την ακολουθία fibonacci:
 - $f_0 = 0$
 - $f_1 = 1$
 - $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, n \geq 3$

ακολουθία fibonacci

- λύση της ακολουθίας fibonacci:

$$F(n) = \frac{\varphi^n - (1 - \varphi)^n}{\sqrt{5}} = \frac{\varphi^n - (-\varphi)^{-n}}{\sqrt{5}},$$

όπου φ είναι το golden ratio:

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.6180339887 \dots$$



Τι είναι γράφημα (γράφος)

- Τόμος Β, Ενότητα 1.1.1



Θεωρία Γραφημάτων - Βασική Ορολογία


- Τόμος Α, Ενότητα 4.1

Ενότητα 1- Βασικές Έννοιες

- Παραδείγματα:
 - Τηλεφωνικό Δίκτυο ΟΤΕ
 - Αποστάσεις-διαδρομές πόλεων
 - Assignment jobs to employees
 - Μέγιστη ροή σε ένα δίκτυο ύδρευσης
 - Πλανόδιος Πωλητής
 - Χρωματισμός γραφήματος, Χρωματισμός επίπεδου γραφήματος
- Μαθηματικά Προαπαιτούμενα
 - Τεχνικές Αποδείξεων:
 - Μαθηματική Επαγωγή
 - Ασθενής μορφή
 - Ισχυρή μορφή
 - Αρχή του Περιστερώνα
 - Εις άτοπο απαγωγή
 - Θεωρία Συνόλων και Συνδυαστική
 - Δυαδικές Σχέσεις
 - Γραμμική Άλγεβρα
 - Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα

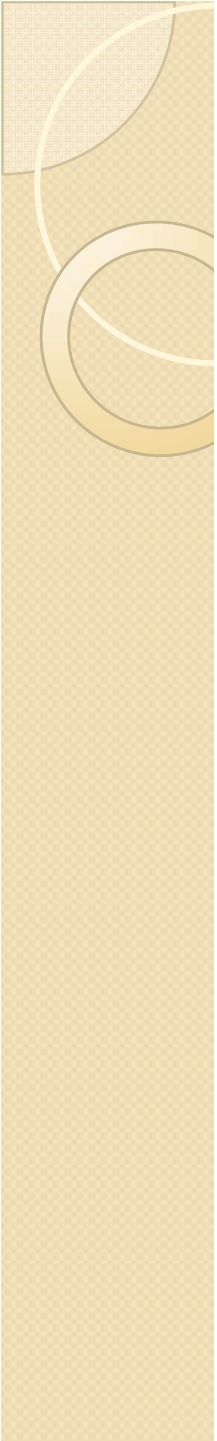
Τι είναι γράφημα (γράφος)


- Μη κατευθυνόμενος γράφος
- Απλός γράφος
- Τάξη γράφου $n(G)$
- Μέγεθος γράφου $e(G)$
- Τετριμμένος γράφος $n(G) = e(G) = 0$
- Πεπερασμένος γράφος
- Κατευθυνόμενος γράφος



Οι γράφοι ως μοντέλο για εφαρμογές

- Τόμος Β, Ενότητα 1.1.2

- 
- Συμπλήρωμα ενός γράφου
 - Μεγιστοτοκός Υπογράφος
 - Επαγόμενος Υπογράφος
 - Πλήρης Γράφος ή Κλίκα
 - Σύνολο Ανεξαρτησίας
-
- Διμερής Γράφος (Bipartite Graph)
 $V_1(G), V_2(G)$
 - Πλήρης διμερής γράφος

- 
- Χρωματισμός Γράφων
 - Χρονικός προγραμματισμός συνεδριάσεων
 - Επίπεδος Γράφος
 - Χρωματισμός Χάρτη
 - Βραχύτατα Μονοπάτια
 - Άκυκλος Γράφος
 - Πρόβλημα του Περιοδεύοντος Πλανόδιου Πωλητή
 - Συνδεδεμένος (Συνεκτικός) Γράφος



Ασκήσεις

- Άσκηση αυτοαξιολόγησης 1.3, σελ. 19



Κύκλοι Euler

- Τόμος Α, Ενότητα 4.2

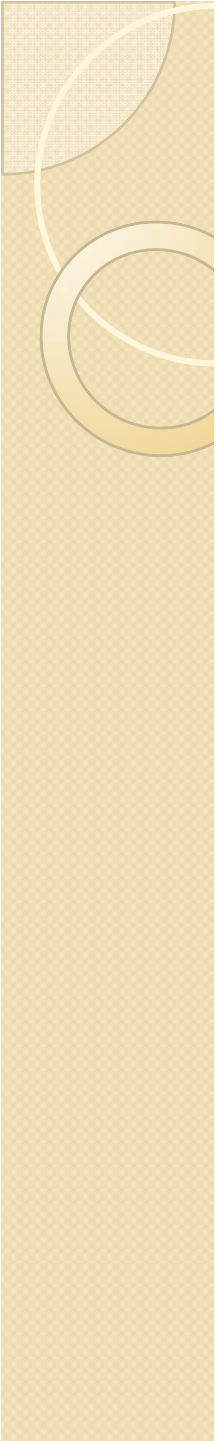
Κύκλοι Euler


- **Ιστορία:** Γέφυρες του ποταμού Pregel στο Königsberg ...
- **Κύκλος Euler:** Περιέχει όλες τις κορυφές, και κάθε ακμή ακριβώς μια φορά
- **Βαθμός μιας Κορυφής (degree) $\delta(v)$:** Το πλήθος των ακμών που εφάπτονται σε αυτή.
- Μια ανακύκλωση μετράει για 2 στο βαθμό.
- **ΘΕΩΡΗΜΑ:** Ένα γράφημα έχει κύκλο του Euler ΕΑΝ ΚΑΙ ΜΟΝΟ ΕΑΝ είναι συνδεδεμένο και κάθε κορυφή έχει άρτιο βαθμό.
- Το άθροισμα των βαθμών των κορυφών ενός γραφήματος είναι άρτιος αριθμός.
- **Corollary:** Το πλήθος των κορυφών ενός γραφήματος με περιττό βαθμό είναι άρτιος αριθμός.
- Γράφημα έχει μονοπάτι από v στο w ($v \neq w$) με όλες τις κορυφές και όλες τις (μη επαναλαμβανόμενες) ακμές ΕΑΝ ΚΑΙ ΜΟΝΟ ΕΑΝ είναι συνδεδεμένο και μόνο οι v και w έχουν περιττό βαθμό.




Κύκλοι Hamilton

- Τόμος Α, Ενότητα 4.3

- 
- 4.3 Κύκλοι HAMILTON και το πρόβλημα του TSP
 - Κύκλος Hamilton: Περιέχει κάθε κορυφή του γραφήματος ακριβώς μία φορά.
 - Πρόβλημα του περιοδεύοντος πωλητή:
 - Κύκλος Euler vs. Κύκλος Hamilton

- 
- Δεν γνωρίζουμε ικανή και αναγκαία συνθήκη για κύκλο Hamilton.
 - Υπερκύβος (Hyper-cube)
 - Κώδικας Gray
 - Το πρόβλημα του περιοδεύοντος πωλητή: Εύρεση του μικρότερου κύκλου Hamilton
 - Ευκλείδειο Γράφημα (Euclidean Graph): Απλό γράφημα με την ιδιότητα ότι για κάθε τριάδα κορυφών v_1, v_2, v_3 ισχύει $w(v_1, v_2) + w(v_2, v_3) \geq w(v_1, v_3)$

- 
- **ΘΕΩΡΗΜΑ:** Γ Ευκλείδειο και K κυκλικό μονοπάτι στο Γ με το μικρότερο δυνατό μήκος το οποίο περιέχει κάθε κορυφή του γραφήματος ΤΟΤΕ υπάρχει κύκλος του Hamilton στο Γ με μήκος ίσο με αυτό του K .
 - Σε Ευκλείδειο γράφημα:
TSP και μικρότερης κυκλικής διαδρομής σε πλήρες γράφημα με βάρη είναι το αυτό πρόβλημα.
 - NP-Complete Πρόβλημα:
 - Πάμε για προσεγγιστική λύση ή heuristic λύση
 - Για παράδειγμα ο αλγόριθμος του πλησιέστερου γείτονα (nearest neighbor)
 - Η μη-βέλτιστη λύση μπορεί να διαφοροποιείται ανάλογα με την αρχική κορυφή



Γράφοι Euler

- Τόμος Β, Ενότητα 2.4.1

Ευληριανοί Γράφοι

- **Μονοκονδηλιά:** Μια διαδρομή χωρίς επαναλαμβανόμενη ακμή.
- **Ευληριανή Μονοκονδυλιά:** Μονοκονδηλιά που περιέχει κάθε ακμή
- **Ευληριανή Περιοδεία:** Κλειστή Ευληριανή Μονοκονδυλιά

- Κάθε μη τετριμμένη κλειστή μονοκονδυλιά T περιέχει έναν κύκλο ως υποδιαδρομή.
- Μια κλειστή μονοκονδυλιά είναι η ένωση κύκλων ξένων μεταξύ τους ως προς τις ακμές.

- **Ευληριανός Γράφος (Eulerian Graph):** Ένας Ευληριανός γράφος είναι ένα γράφος
- που έχει μια Ευληριανή περιοδεία.

- **ΘΕΩΡΗΜΑ: Χαρακτηρισμός Ευληριανών Γράφων.**
Γ συνδεδεμένος (συνεκτικός) γράφος. 3 ισοδύναμες προτάσεις:
 - Α) Ο G είναι Ευληριανός.
 - Β) Κάθε κορυφή του G έχει άρτιο βαθμό.
 - Γ) Ο G είναι ένωση κύκλων ξένων μεταξύ τους ως προς τις ακμές.



Εφαρμογές των γράφων Euler

- Τόμος Β, Ενότητα 2.4.3

Εφαρμογές

- Ακολουθίες deBruijn
- Προβλήματα Ταχυδρόμων
 - Κινέζος Ταχυδρόμος
 - Τεμπέλης Ταχυδρόμος

Πηγές - Αναφορές

- Διακριτά Μαθηματικά και Μαθηματική Λογική, Τόμοι Α και Β, ΕΑΠ (Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο)
- http://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci_number
- http://en.wikipedia.org/wiki/Golden_ratio